ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδες 150-151

Β. γ

Γ. β

Δ. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 96

ΘΕΜΑ 2ο

α.

Πρέπει να ισχύει $x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Πρόσημο του $x^2 - 1$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$x^2 - 1$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Επομένως $x^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1$ ή $x \geq 1$

Άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty, \ -1] \cup [1, \ +\infty)$

β.

$f\,'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής όταν $x = 3$ είναι

$$f\,'(3) = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

γ.

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)}{(x - 2)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{(x - 2)\left(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε ότι $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 28, 29, 30\}$ με $N(\Omega) = 30$

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots 26, 28, 30\}$ με $N(A) = 15$

$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ με $N(B) = 6$

Ακόμα είναι $A \cap B = \{10, 20, 30\}$ με $N(A \cap B) = 3$

και $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{30} = \dfrac{1}{10}$

α.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

β.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

γ.

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') =$$
$$= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) =$$
$$= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

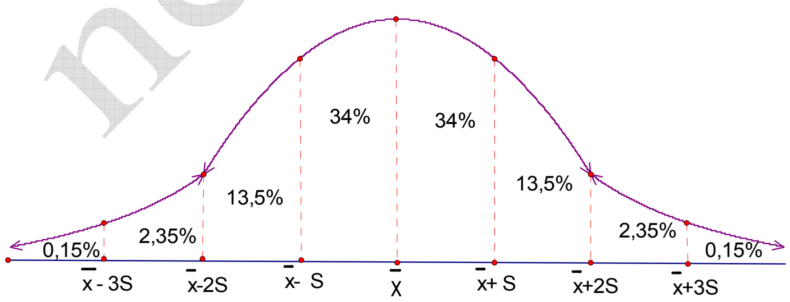
δ.

$$P\left[(A' \cap B) \cup (A \cap B')\right] = P\left[(B - A) \cup (A - B)\right] =$$
$$= P(B - A) + P(A - B) =$$
$$= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) =$$
$$= P(B) + P(A) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{10} = \frac{1}{2}$$

Σημείωση : ως γνωστόν τα $(B - A)$ και $(A - B)$ είναι ασυμβίβαστα

ΘΕΜΑ 4ο

Η καμπύλη της κανονικής κατανομής και τα σχετικά ποσοστά φαίνονται στο σχήμα



α.

Αφού το 50% του δείγματος έχει βάρος το πολύ 65 κιλά, θα είναι $\bar{x}$=65 κιλά.

Επειδή η κατανομή είναι κανονική, η διάμεσος είναι ίση με την μέση τιμή

Άρα $\delta = 65$ κιλά

Το 47, 5% του δείγματος με βάρος από 65 έως 75 κιλά βρίσκεται στο διάστημα

$(\bar{x}\ ,\ \ \bar{x}+2S)$.

Άρα $\bar{x}+2S=75 \Leftrightarrow 65+2S=75 \Leftrightarrow S=5$

β.

$CV=\dfrac{S}{\bar{x}}=\dfrac{5}{65}\approx 0{,}077 = 7{,}7\% < 10\%$ οπότε το δείγμα είναι ομοιογενές

γ.

Οι μαθητές με βάρος από $55=\bar{x}-2S$ κιλά έως $70=\bar{x}+S$ κιλά βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+S)$.

Όπως φαίνεται από την καμπύλη, το ποσοστό αυτών είναι $13{,}5+34+34=81{,}5\%$

δ.

Οι μαθητές με βάρος από $55=\bar{x}-2S$ κιλά έως $60=\bar{x}-S$, βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}-S)$ και το αντίστοιχο ποσοστό τους είναι 13,5% .

Οπότε, αν ν είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε $\dfrac{13{,}5}{100}\cdot \nu=27 \Leftrightarrow$

$\nu=200$ μαθητές